Álgebra Lineal

Matrices regulares

CLARIFICACIÓN DE CONCEPTOS: Una matriz A *nilpotente de orden* r es una matriz que verifica $A^r = 0$ y $A^{r-1} \neq 0$. Una matriz A *idempotente de orden* s es una matriz que verifica $A^s = A$ y s es el menor natural para el que se verifica esa igualdad . Cuando $r = 2$ se dice que A es nilpotente, cuando $s = 2$ se dice que A es idempotente. A es *unipotente de orden* l si $A^l = I$ y l es el menor natural para el que se verifica dicha igualdad. Si $l = 2$ se dice que A es unipotente.

38) Probar:

1. Si A es nilpotente de orden r, entonces $A^h = 0$ para todo h mayor o igual que r y $A^t \neq 0$ para todo t menor que r

2. Si A es idempotente de orden s, entonces dividiendo por s, $A^p = A^{qs+t} = A^{q+t}$ con $t < s$ para todo natural p. Si $q + t > s$ podemos volver a dividir por s hasta llegar a que $A^p = A^g$ donde $g < s$.

3. Si A es unipotente de orden l entonces es invertible. Determinar la inversa de A. Si A es unipotente entonces coincide con su inversa.

39) Demostrar que la matriz inversa de A es B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

40) Calcular el cuadrado de:

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Indicar cuál es la inversa de A

41) Probar que si A es una matriz idempotente ($A^2 = A$) entonces también lo es $B = I - A$ y además $AB = BA = 0$

42) Demostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ verifica una ecuación del tipo $A^2 + \alpha A + \beta I = 0$ calculando para ello los valores de α y β. Utilizar este resultado para calcular la inversa de A.

43) Determinar cuáles de las matrices siguientes son regulares y calcular la inversa de las que lo sean:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

44) Dadas las matrices A, B y C, comprobar que $AB = AC$ y concluir que dicha igualdad no implica necesariamente que $B = C$. Razonar por qué A tiene que ser singular.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

45) Demostrar las siguientes propiedades para una matriz regular A de orden n y elementos reales:

1. $(A^{-1})^{-1}) = A$
2. $(rA)^{-1} = \frac{1}{r} A^{-1}$ para cada $r \neq 0$, número real
3. $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$, siendo p un número entero positivo

46) Una matriz cuadrada A, de orden n, es idempotente si verifica $A^2 = A$. Razonar que una matriz idempotente que no sea la identidad no puede ser regular.

47) Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Se pide

a) Calcular la forma de Hermite por columnas de B

b) Encontrar una matriz regular Q tal que

$$QA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Indicar razonadamente si A y B son equivalentes

48) Estudiar si las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

son equivalentes

49) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

calcular una matriz regular Q, de orden 3, de forma que

$$QA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$